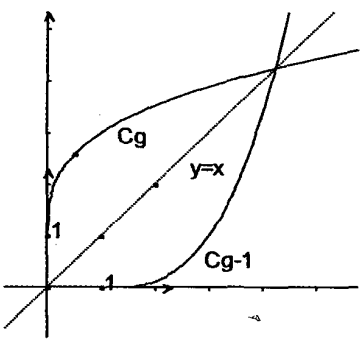

Exercice n° 10

● a) $x \to 1-\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x \to 1+\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $1+\sqrt{x} \neq 0 \quad \forall x \succ 0$: donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x)=\frac{(1-\sqrt{x})'.(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x}).(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}.(1+\sqrt{x})^2}$$

b)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	1 ↘	-1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)}{\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)}=-1$$

($\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$)

c) f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ d'où elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=]-1,1]$

d) $f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2-2\sqrt{x}=1+\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 1=3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{3}$ donc $\boxed{x=\frac{1}{9}}$

e) • $f(4)=\frac{1-\sqrt{4}}{1+\sqrt{4}}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$

• $(f^{-1})'(-\frac{1}{3})=\frac{1}{f'\left[(f^{-1})(-\frac{1}{3})\right]}=\frac{1}{f'(4)}=\frac{1}{-\frac{1}{18}}$

$=-18$

D'où $\boxed{(f^{-1})'(-\frac{1}{3})=-18.}$

● a) $g'(x)=f'(x)-1<0, \ \forall x \geq 0$

g étant continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ il résulte que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty}g(x), g(0)\right]$

Or : $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=-1-\infty=-\infty$

Et $g(0)=f(0)-0=1$

Donc $g([0,+\infty[)=]-\infty,1]$

Coclusion : g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,1]$

b) $f(x)=x \Leftrightarrow g(x)=0$ et on a $0 \in]-\infty,1]$ il résulte que 0 admet un unique antécédent α par g dans $[0,+\infty[$

c) $\begin{cases} g(0)=1 \\ g(1)=f(1)-1=-1 \end{cases} \Rightarrow g(0).g(1)\prec 0$

Conclusion : $0<\alpha<1$

Exercice n° 11

● $g'(x)=-\sin(x)<0 \ \forall x \in]0,\pi[\Rightarrow$ g est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc g est une bijection de $[0,\pi]$ sur $g([0,\pi])=[-1,1]$.

●* $g^{-1}(0)=x_0 \Leftrightarrow g(x_0)=0 \Leftrightarrow \cos x_0=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{\pi}{2}$

Donc $\boxed{g^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}}$

*De même on a : $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ d'où $\boxed{g^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}}$

Qarray.tn -Agra Blech- Qarray.tn